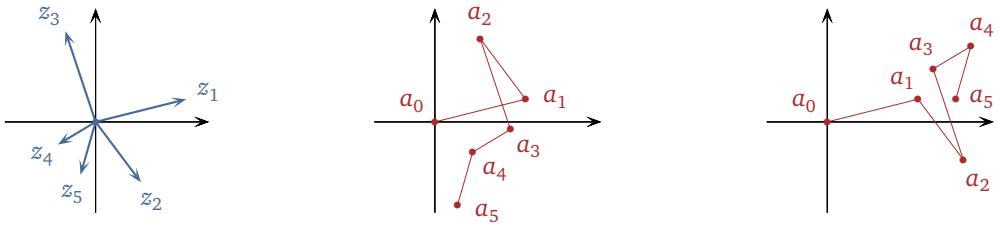
LIGNES BRISÉES CONFINÉES

Deux niveaux de difficulté/longueur : — Piste bleue-rouge : questions **1)** à **6)**. — Piste noire : tout le devoir.

Pour tous $r \geqslant 0$ et $a, b \in \mathbb{C}$, on pose $D_r = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \quad |z| \leqslant r\right\}$ et on note $[a,b]$ le segment de $\mathbb{C}$ joignant a et b :

$$[a,b] = \left\{(1-\lambda)a + \lambda b \mid \quad \lambda \in [0,1]\right\}.$$

Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$. On pose $a_0 = 0$ et $a_k = \varepsilon_1 z_1 + \dots + \varepsilon_k z_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. La ligne brisée $[a_0,a_1] \sqcup \dots \sqcup [a_{n-1},a_n]$ peut être vue comme le trajet en n étapes d'un mobile qui part de 0 et qui se déplace successivement de $\varepsilon_1 z_1$, puis de $\varepsilon_2 z_2$, etc. Pour les deux lignes brisées ci-dessous, on a choisi pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ la famille $(1,-1,-1,1,1)$ sur la figure du milieu et la famille $(1,1,1,-1,1)$ sur celle de droite.



Avec 2^n familles $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de signes, on obtient au plus 2^n lignes brisées $[a_0,a_1] \sqcup \dots \sqcup [a_{n-1},a_n]$. Peut-on choisir les signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ pour que le dernier point a_n reste « proche » du premier a_0 ? Peut-on garantir que la ligne brisée reste intégralement « proche » de a_0 ? Voilà le genre de questions auxquelles on souhaite répondre.

1) Simplifier $|a-b|^2 + |a+b|^2$ pour tous $a, b \in D_1$ et en déduire que l'un des nombres $a-b$ ou $a+b$ appartient à $D_{\sqrt{2}}$.

2) a) Soient $r, s \in [0,1]$ et $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $|\varphi - \psi| \leqslant \dfrac{\pi}{3}$. Montrer que $\left|r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right| \leqslant 1$.

b) En déduire que pour tous $a, b, c \in D_1$, l'un des nombres $a-b$, $a+b$, $b-c$, $b+c$, $c-a$ ou $c+a$ appartient à D_1.

3) a) Montrer par récurrence, grâce au résultat de la question **2)c)**, que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in D_1^n, \quad \exists (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n, \quad \varepsilon_1 z_1 + \dots + \varepsilon_n z_n \in D_{\sqrt{2}}.$$

Avec les notations de l'introduction, étant donnés des nombres $z_1, \dots, z_n \in D_1$, on peut toujours trouver une ligne brisée $[a_0,a_1] \cup \dots \cup [a_{n-1},a_n]$ dont le dernier point a_n est à distance d'au plus $\sqrt{2}$ du premier.

b) Montrer que la constante $\sqrt{2}$ ne peut pas être remplacée par un réel plus petit.

On s'intéresse à présent à un résultat de confinement plus global. On ne cherche plus seulement à contrôler le dernier point de la ligne brisée, mais la ligne brisée tout entière. Pour tout $n \geqslant 2$, on note $\mathscr{P}_n$ la proposition suivante :

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in D_1^n, \quad \exists (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n, \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \dots + \varepsilon_k z_k \in D_{\sqrt{3}}.$$

4) Initialisation : Montrer que $\mathscr{P}_2$ est vraie.

5) Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on veut montrer que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi. Soit $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in D_1^{n+1}$.

a) On suppose dans cette question que D_1 contient $z_1 + \eta z_2$ pour un certain $\eta \in \{\pm 1\}$. Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à la famille $(z_1 + \eta z_2, z_3, \dots, z_{n+1})$.

On suppose maintenant que D_1 ne contient ni $z_1 - z_2$ ni $z_1 + z_2$.

b) En encadrant $\mathrm{Re}\left(\overline{z_1} z_2\right)$, montrer que $D_{\sqrt{3}}$ contient à la fois $z_1 - z_2$ et $z_1 + z_2$.

c) Montrer que D_1 contient $z_1 + \eta z_3$ ou $z_2 + \eta z_3$ pour un certain $\eta \in \{\pm 1\}$, puis conclure.

La proposition $\mathscr{P}_n$ est ainsi prouvée pour tout $n \geqslant 2$. Avec les notations de l'introduction, étant donnés des nombres $z_1, \dots, z_n \in D_1$, on peut toujours trouver des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ pour lesquels $a_0, \dots, a_n$ appartiennent à $D_{\sqrt{3}}$. On aimerait cependant affirmer que la ligne brisée $[a_0,a_1] \cup \dots \cup [a_{n-1},a_n]$ est entièrement incluse dans $D_{\sqrt{3}}$. Il suffit pour cela de montrer que $D_{\sqrt{3}}$ est *convexe* — une partie X de $\mathbb{C}$ est dite *convexe* si $[a,b] \subset X$ pour tous $a, b \in X$.

6) Montrer que D_r est convexe pour tout $r \geqslant 0$.

On peut montrer que la constante de confinement $\sqrt{3}$ est optimale au sens suivant. Pour tout $\delta > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des points $z_1, \dots, z_n \in D_1$ pour lesquels pour tous $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$, l'un des réels $|\varepsilon_1 z_1|, \dots, |\varepsilon_1 z_1 + \dots + \varepsilon_n z_n|$ est strictement supérieur à $\sqrt{3} - \delta$.

La fin du devoir est consacrée à une amélioration du résultat de la question **3)a)** dans un cas particulier. On souhaite montrer que pour tous $z_1,\dots,z_{2n+1}\in\mathbb{U}$ — de module exactement 1 cette fois — il existe des signes $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n+1}\in\{\pm 1\}$ pour lesquels $\varepsilon_1 z_1+\dots+\varepsilon_{2n+1}z_{2n+1}\in D_1$.

7) Montrer que le résultat est faux avec seulement deux nombres complexes et non pas $2n+1$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on appelle *partie positive de* x le réel $x^+=\max\{0,x\}$. On admet que pour toute fonction T-périodique $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $T>0$ et tout $a\in\mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

8) Soient $\omega_1,\dots,\omega_{2n+1}\in\mathbb{R}$ des réels pour lesquels $\omega_1\leqslant\dots\leqslant\omega_{2n+1}$ et $\omega_{2n+1}-\omega_1<\pi$.

a) Montrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$: $\quad\cos\omega_{2k}-\cos\omega_{2k-1}\leqslant\displaystyle\int_{\omega_{2k-1}}^{\omega_{2k}}(-\sin t)^+\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k\cos\omega_k\leqslant-\cos\omega_{2n+1}+\int_{\omega_{2n+1}-\pi}^{\omega_{2n+1}}(-\sin t)^+\,\mathrm{d}t$.

c) Exprimer x^+ en fonction de x et $|x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k\cos\omega_k\leqslant 1$.

9) a) Soient $\zeta_1,\dots,\zeta_n\in\mathbb{U}$. Trouver des réels $\omega_1,\dots,\omega_n$ pour lesquels $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\zeta_k\right|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\omega_k$.

b) Conclure.